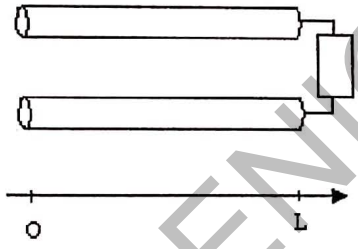
ENIG GCR1	**DEVOIR DE CONTROLE EN PROPAGATION GUIDEE**	**M. BENZINA.H** ***Documents non autorisés*** **MARDI 24/11/2020** **Durée : 1H30**

N.B : ***L'étudiant(e), dispose d'un formulaire et d'une abaque. L'usage d'une calculatrice standard est autorisé. Rappel : les téléphones mobiles sont interdits***

EXERCICES

I)Soit une ligne de transmission sans pertes, d'impédance caractéristique Z_C, de constante de propagation β, de longueur L et qui est terminée par une charge $\underline{Z}_L$.



a)Etablir l'expression de l'impédance localisée en un point d'abscisse z de la ligne, en fonction de Z_C, β, L, z, et $\underline{Z}_L$.

b)Comment se simplifie cette expression lorsque la ligne est terminée :

i) par un court-circuit.

ii) par un circuit ouvert.

II)1) Une ligne de transmission sans pertes d'impédance caractéristique Z_C=50Ω est terminée en z=L, par une impédance $\underline{Z}_L$ =125-j85(Ω). Trouver par le calcul analytique.

i) en z=L le coefficient de réflexion $\underline{\rho}$.

ii)le ROS.

iii)L'impédance d'entrée à une distance 0.33λ de la charge ainsi qu'a 0.83λ de la charge.

2)Même question que 1) mais, ici, l'impédance $\underline{Z}_L$ est un court-circuit.

3)Même question que 1) mais, ici, l'impédance $\underline{Z}_L$ est un court-ouvert.

4)Même question que 1) mais, ici, l'impédance $\underline{Z}_L$ est égale à 50Ω.

III) Une ligne de transmission sans pertes d'impédance caractéristique Z_C=75Ω est terminée en z=L, par une impédance $\underline{Z}_L$ =105-j67.5(Ω).

Trouver par **l'abaque de Smith**

1) en z=L le coefficient de réflexion $\underline{\rho}$. (module et phase(ou angle))

2)le ROS.

3)L'impédance d'entrée à une distance 0.17λ de la charge. (bien expliquer la démarche).

4)L'admittance correspondante $\underline{Y}_L$

5)les positions des minimas de courant.

H.BENZINA GCR ENIG

Bon travail

LES LIGNES DE TRANSMISSION

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = -R'\underline{I} - L'\frac{\partial \underline{I}}{\partial t}. \qquad \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -G'\underline{U} - C'\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$$

Equations des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2}L'C' - \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}[R'C'+L'G'] - R'G'\underline{U} = 0$$

Régime sinusoïdal

$$\underline{U}(z,t) = \underline{u}(z)e^{j\omega t}. \qquad \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = -(R'+j\omega L')\underline{i}$$

$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial z} = -(G'+j\omega C')\underline{u}. \quad \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} = (R'+j\omega L')(G'+j\omega C')\underline{u}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$\underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z}.$$

$$\underline{i}(z) = \underline{Y}_c(\underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z})$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{u}_+}{\underline{i}_+} = -\frac{\underline{u}_-}{\underline{i}_-} = \sqrt{\frac{(R'+j\omega L')}{(G'+j\omega C')}}$$

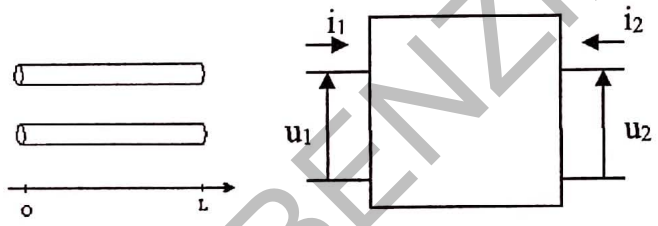
Coefficient de reflection :

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{u}_-}{\underline{u}_+}e^{2\underline{\gamma}z}. \qquad \underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1+\underline{\rho}(z)]$$

$$\underline{i}(z) = \underline{Y}_c\underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1-\underline{\rho}(z)]. \quad \underline{Z}(z) = \underline{Z}_c\frac{1+\underline{\rho}(z)}{1-\underline{\rho}(z)}$$

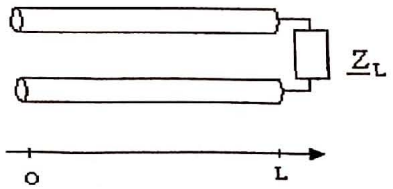
$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{Z}(z)-\underline{Z}_c}{\underline{Z}(z)+\underline{Z}_c}$$

Une ligne de transmission de longueur L est équivalente à un quadripôle :



$$\begin{pmatrix}\underline{u}_2\\ \underline{i}_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cosh(\underline{\gamma}L) & -\underline{Z}_c\sinh(\underline{\gamma}L)\\ -\underline{Y}_c\sinh(\underline{\gamma}L) & \cosh(\underline{\gamma}L)\end{pmatrix}}_{\text{matrice de chaine}}\begin{pmatrix}\underline{u}_1\\ \underline{i}_1\end{pmatrix}$$

LIGNE TERMINEE PAR UNE CHERGE



$$\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}_L e^{2\underline{\gamma}(z-L)}$$

Cas d'une ligne adaptée :

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{\rho}_L = 0; \underline{u}_- = 0; \underline{\rho}(z) = 0;$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c$$

Cas d'une ligne terminée par un court-circuit(cc)

$$\underline{Z}_L = 0; \underline{u}_L = 0; \underline{\rho}_L = -1; \underline{\rho}(z) = -e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c\tanh[\underline{\gamma}(z-L)]$$

Cas d'une ligne terminée par un circuit ouvert(co)

$$\underline{Z}_L = \infty; \underline{i}_L = 0; \underline{\rho}_L = +1; \underline{\rho}(z) = +e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c\coth[\underline{\gamma}(z-L)]$$

LIGNES DE TRANSMISSION SANS PERTES

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \; ; R'=G'=0 \; ; \; \underline{\gamma} = j\beta$$

$$|\underline{u}(z)| = |\underline{u}_+||1+\underline{\rho}(0)e^{2j\beta z}|$$

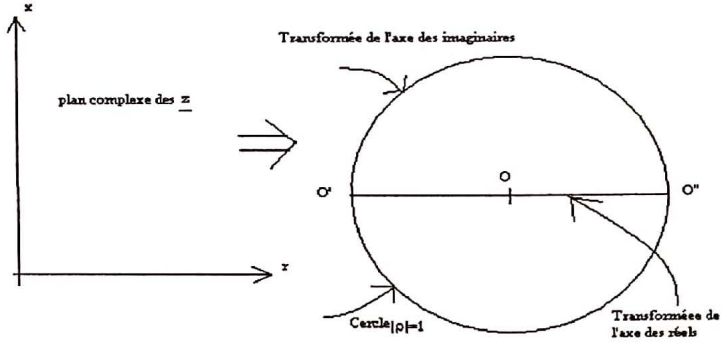
Le taux d'ondes stationnaires (TOS)

$$s = \frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} \Rightarrow |\rho| = \frac{s-1}{s+1}$$

ABAQUE DE SMITH

C'est la transformation :

$$\underline{z}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{Z_c} = r + jx \quad \rightarrow \quad \underline{\rho}(z) = a + jb$$



	z(z)	ρ(z)	Commentaire
C.A	1	0	Point O
C.C	0	-1	Point O'
C.O	∞	+1	Point O''
Resistance pure	r	$1-\frac{2}{1+r}$	Portion de l'axe Є[-1,1]
Réactance pure	jx	$\frac{jx-1}{jx+1}$	Cercle unité

H.BENZINA GCR ENIG

DC PG ENIG 2020-2021

I) a) $\underline{\rho}(\beta) = \rho(0)\exp(2j\beta\beta)$; $\underline{\rho}_L = \rho(0)\exp(2j\beta L)$

$\frac{\underline{\rho}(\beta)}{\underline{\rho}_L} = \frac{\exp(2j\beta\beta)}{\exp(2j\beta L)} \Rightarrow \underline{\rho}(\beta) = \underline{\rho}_L \exp(2j\beta(\beta - L))$

d'autre part. $\underline{Z}(\beta) = Z_c \frac{1+\underline{\rho}(\beta)}{1-\underline{\rho}(\beta)} = Z_c \frac{1+\underline{\rho}_L \exp(2j\beta(\beta-L))}{1-\underline{\rho}_L \exp(2j\beta(\beta-L))}$

or $\underline{\rho}_L = \frac{\underline{Z}_L - Z_c}{\underline{Z}_L + Z_c} \Rightarrow \underline{Z}(\beta) = Z_c \frac{1 + \frac{\underline{Z}_L - Z_c}{\underline{Z}_L + Z_c}\exp[2j\beta(\beta-L)]}{1 - \frac{\underline{Z}_L - Z_c}{\underline{Z}_L + Z_c}\exp[2j\beta(\beta-L)]}$

$\underline{Z}(\beta) = Z_c \frac{\underline{Z}_L(1+\exp(*)) + Z_c(1-\exp(*))}{\underline{Z}_L(1-\exp(*)) + Z_c(1+\exp(*))}$

on sait que $\text{tg}(x) = -j\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = j\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \Rightarrow \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -j\,\text{tg}(x)$

$\Rightarrow \underline{Z}(\beta) = Z_c \frac{\underline{Z}_L + Z_c\frac{(1-\exp(*))}{1+\exp(*)}}{Z_c + \underline{Z}_L\frac{1-\exp(*)}{1+\exp(*)}} = Z_c \frac{\underline{Z}_L - j\,\text{tg}[\beta(\beta-L)]}{Z_c - j\frac{\underline{Z}_L}{Z_c}\text{tg}[\beta(\beta-L)]}$

b) i) Lorsque $\underline{Z}_L = 0 \Rightarrow \underline{Z}_{cc}(\beta) = -j Z_c \,\text{tg}[\beta(\beta-L)]$

ii) Lorsque $\underline{Z}_L = \infty \Rightarrow j Z_c \,\text{cotg}[\beta(\beta-L)]$

II) 1°) a) $\underline{\rho}_L = \frac{\underline{Z}_L - Z_c}{\underline{Z}_L + Z_c} = 0{,}5376 - j\,0{,}2246 = 0{,}5827\,e^{-j\,0{,}3957}$

$-0{,}3957\text{ rd} = -22{,}67°$

ii) ROS : $S = \frac{1+|\underline{\rho}|}{1-|\underline{\rho}|} = 3{,}792$

iii) $\underline{Z}(\beta_0 = L - 0{,}33\lambda) = Z_c \frac{\underline{Z}_L + j Z_c \,\text{tg}[2\pi(0{,}33)]}{Z_c + j\underline{Z}_L \,\text{tg}[2\pi(0{,}33)]}$

$= (21{,}49 + j\,37{,}38)\,\Omega$; $\underline{Z}(\beta_1 = L - 0{,}83\lambda) = \underline{Z}(\beta_0)$

H BENZINA GCP ENIG

2°) $\underline{\rho}_L = -1$; $s = \infty$

$Z_{cc}(z_0) = +j Z_c \operatorname{tg}[2\pi(0,33)] = -j\,90,95\ \Omega$

$Z_{cc}(z_1) = Z_{cc}(z_2)$

3°) $\underline{\rho}_L = +1$; $s = \infty$

$Z_{co}(z_0) = -j Z_c \operatorname{cotg}[2\pi(0,33)] = +j\,27,49\ \Omega$

$Z_{co}(z_0) = Z_{co}(z_1)$

4°) $\underline{\rho}_L = 0$; $s = 1$

$Z_{cA}(z_0) = Z_c = 50\ \Omega$

14 pts

III) $\underline{Z}_L = (105 - j\,67,5)\ \Omega \Rightarrow \underline{z}_A = \dfrac{\underline{Z}_L}{Z_c} = 1,4 - j\,0,9$

1°) $|\underline{\rho}_L| = 0,38$ (Théo : 0,3842) $\quad \angle \underline{\rho}_L = -45°$ (Théo $-45,48°$)

2°) ROS : $1 \simeq 2,2$ (théorique 2,248)

3°) $d_A = 0,312\lambda$

on ajoute $0,17\lambda \Rightarrow d_B = d_A + 0,17\lambda = 0,482\lambda$

on trace le cercle de rayon OA puis la droite qui passe par d_B et O $\Rightarrow$ l'intersection donne la solution B $\Rightarrow z_B \simeq 0,45 - j\,0,09$

$\Rightarrow \underline{Z}_B = (33,75 - j\,6,75)\ \Omega$ (Théo $33,66 - j\,6,37$)

4°) $y \rightsquigarrow A'$: $y_{A'} = 0,51 + j\,0,31$ (théo $0,5014 + j\,0,321$)

$\underline{Y}_L = \dfrac{y_{A'}}{Z_c} = 0,0068 + j\,0,0041$ (Théo $0,0068 + j\,0,0043$)

5°) Position de minimum de courant : point C

$d_C = 0,25 \Rightarrow z_{min} = L - (d_C - d_A + n\frac{\lambda}{2})$

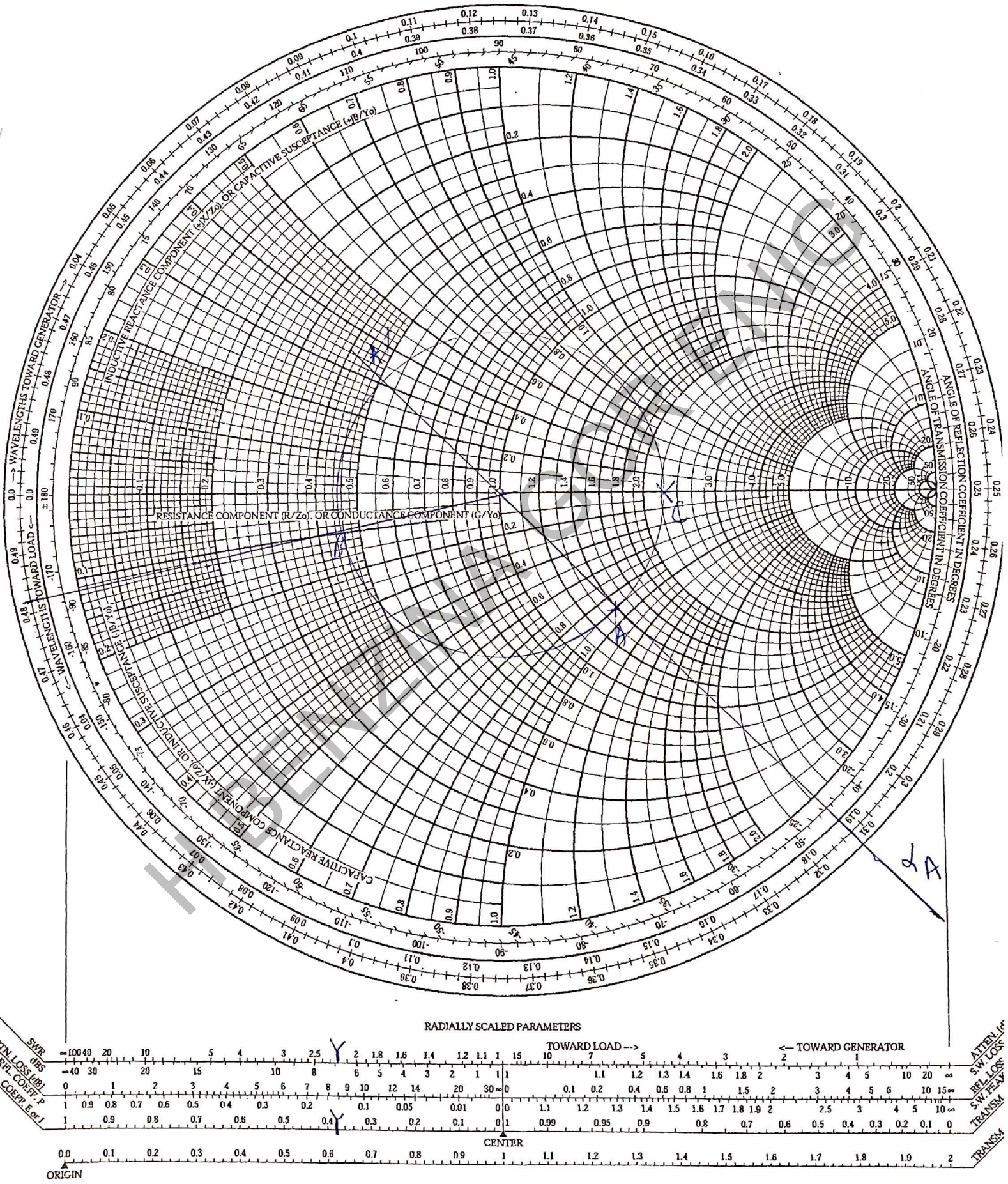
$= L - (0,25\lambda + 0,5\lambda - 0,312\lambda + n\frac{\lambda}{2})$

$= L - (0,438\lambda + n\frac{\lambda}{2})$ 16 pts

total 62 pts $\rightarrow$ 1/1 $\rightarrow$ 0,33 $\rightarrow$ 0,4 $\Rightarrow$ noté sur 24,75

H.BENZINA GCR ENIG

Smith Chart



HYBLINK GOLF LAB

ENIG

GCR1

A.U 2020/2021

BENZINA H

Documents non autorisés

1 page+1 abaque+1 formulaire

DUREE 02H00

DEVOIR DE SYNTHESE DE PROPAGATION GUIDEE

EXERCICE N°1

Sur une ligne de transmission sans pertes d'impédance caractéristique Zc=75Ω et où la longueur d'onde vaut λ=80mm, une impédance $\underline{Z_L}$ = (45-j70)Ω termine la ligne. Déterminer par le calcul:

1) a)En z=L le coefficient de réflexion $\underline{\rho_L}$ (sous forme $\underline{\rho(z)=a+jb}$)

b)Le rapport d'ondes stationnaires s.

c)L'admittance de charge $\underline{Y_L}$ (avec la meilleure précision possible).

2) a)Le coefficient de réflexion (sous forme $\underline{\rho(z)=a+jb}$) à une distance de 13 cm de la charge.

b) L'impédance ramenée à une distance de 13 cm de la charge

c) Le coefficient de réflexion (sous forme $\underline{\rho(z)=a+jb}$) à une distance 9 cm de la charge.

d) L'impédance ramenée à une distance 9 cm de la charge

EXERCICE N°2 (1 abaque)

Une ligne coaxiale remplie d'un diélectrique de constante relative ε_r=3 d'impédance caractéristique Zc=75Ω est terminée par une impédance constituée par une résistance R=150Ω en série avec une capacité C égale à 1 pF. La ligne est alimentée par un générateur délivrant un signal de fréquence 707MHz.

1°) En utilisant l'abaque de Smith , déterminer:

a-le rapport d'ondes stationnaires s.

b- le coefficient de réflexion $\underline{\rho_L}$ (module et phase).

c-l'admittance de charge $\underline{Y_L}$ (avec la meilleure précision possible).

d-l'impédance ramenée à 15 cm de la charge.

e-les positions des minimas et maximas de tension sur la ligne.

f-la position des points sur la ligne où l'impédance réduite vaut r+j.

g- la position des points sur la ligne où l'impédance réduite vaut 1+jb

2°) On se propose d'adapter cette ligne en utilisant un stub en circuit ouvert d'impédance caractéristique égale au double de celle de la ligne principale.

Déterminer à quelle distance d de la charge doit-on placer ce stub ainsi que sa longueur ℓ pour réaliser l 'adaptation. (on donnera toutes les solutions possibles)

$\alpha_{A'}$	$\alpha_{B1'}$	$\alpha_{B2'}$	$\underline{y}_{B1'}$	$\underline{y}_{B2'}$	α_1
α_2	d_1	d_2	l_1	l_2	

EXERCICE N°3

Soit un guide rectangulaire sans pertes rempli d'un diélectrique de permittivité relative égale à 3 et telle que a=7.2cm et b=4.40cm. Pour un mode TE_{13} se propageant sous une fréquence de fonctionnement égale à 1.25 fois la fréquence de coupure de ce mode (f_o=1.25 fc), calculer :

a)La fréquence de coupure f_c.

b)La fréquence de fonctionnement (fréquence du générateur) f_o.

c)La constante de propagation β_g.

d)La longueur d'onde de coupure λ_c.

e)La longueur d'onde guidée λ_g.

f)La vitesse de phase v_φ.

Bon Travail

H BENZINA GCR ENIG

LES LIGNES DE TRANSMISSION

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = -R'\underline{I} - L'\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} \; ; \; \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -G'\underline{U} - C'\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$$

Equations des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} L'C' - \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}[R'C' + L'G'] - R'G'\underline{U} = 0$$

Régime sinusoïdal

$$\underline{U}(z,t) = \underline{u}(z)e^{j\omega t} \; ; \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = -(R' + j\omega L')\underline{i} \; ;$$

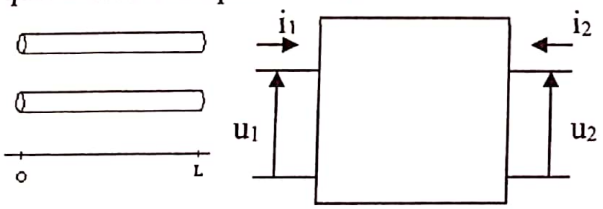
$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial z} = -(G' + j\omega C')\underline{u} \; ; \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{u}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$\underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z} \; ; \underline{i}(z) = \underline{Y}_c(\underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z})$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{u}_+}{\underline{i}_+} = -\frac{\underline{u}_-}{\underline{i}_-} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')}{(G' + j\omega C')}}$$

Une ligne de transmission de longueur L est équivalente à un quadripôle :



$$\begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(\underline{\gamma}L) & -\underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}L) \\ -\underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}L) & \cosh(\underline{\gamma}L) \end{pmatrix}}_{\text{matrice de chaine}} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{i}_1 \end{pmatrix}$$

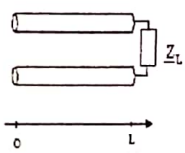
Coefficient de reflection :

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{u}_-}{\underline{u}_+} e^{2\underline{\gamma}z} \; ; \underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1 + \underline{\rho}(z)] \; ;$$

$$\underline{i}(z) = \underline{Y}_c \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1 - \underline{\rho}(z)]$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}(z)}{1 - \underline{\rho}(z)} \; ; \underline{\rho}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - \underline{Z}_c}{\underline{Z}(z) + \underline{Z}_c}$$

LIGNE TERMINEE PAR UNE CHERGE



$$\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}_L e^{2\underline{\gamma}(z-L)}$$

Cas d'une ligne adaptée :

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{\rho}_L = 0; \underline{u}_- = 0; \underline{\rho}(z) = 0;$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c$$

Cas d'une ligne terminée par un court-circuit(cc)

$$\underline{Z}_L = 0; \underline{u}_L = 0; \underline{\rho}_L = -1; \underline{\rho}(z) = -e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \tanh[\underline{\gamma}(z - L)]$$

Cas d'une ligne terminée par un circuit ouvert(co)

$$\underline{Z}_L = \infty; \underline{i}_L = 0; \underline{\rho}_L = +1; \underline{\rho}(z) = +e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \coth[\underline{\gamma}(z - L)]$$

LIGNES DE TRANSMISSION SANS PERTES

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \; ; R'=G'=0 \; ; \; \underline{\gamma} = j\beta \; ;$$

La matrice de chaine devient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta L) & -jZ_c \sin(\beta L) \\ -jY_c \sin(\beta L) & \cos(\beta L) \end{pmatrix}}_{\text{matrice de chaine}}$$

$$|\underline{u}(z)| = |\underline{u}_+||1 + \underline{\rho}(0)e^{2j\beta z}|$$

Le taux d'ondes stationnaires (TOS)

$$s = \frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \Rightarrow |\rho| = \frac{s-1}{s+1}$$

ABAQUE DE SMITH

C'est la transformation : $\underline{z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_c} = r + jx \rightarrow \underline{\rho}(z) = a + jb$

	$\underline{z}(z)$	$\underline{\rho}(z)$	Commentaire
C.A	1	0	Point O
C.C	0	-1	Point O'
C.O	∞	+1	Point O''
Resistance pure	r	$1 - \frac{2}{1+r}$	Portion de l'axe $\in$[-1,1]
Réactance pure	jx	$\frac{jx-1}{jx+1}$	Cercle unité

GUIDES D'ONDES

$\Delta \underline{\psi} = \underline{k}^2 \underline{\psi}$ avec $\underline{k}^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$ et $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$

Pas de pertes $\Rightarrow \underline{k}^2 = -k_0^2 = -\omega^2\mu\varepsilon$

GUIDE RECTANGULAIRE :

Résolution : $\underline{\psi}(x,y,z) = \underline{X}(x)\underline{Y}(y)\underline{Z}(z)$

$$\Rightarrow \beta_g^2 = k_0^2 - k_c^2; avec\, k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\underline{X}(x) = \underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)$$

$$\underline{Y}(y) = \underline{C}\sin(k_y y) + \underline{D}\cos(k_y y)$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{F}.\exp(-j\beta_g z)$$

conditions aux limites : $\underline{E}_y = \underline{E}_z = 0 enx = 0 eta$

$$\underline{E}_x = \underline{E}_z = 0 \; en \; y = 0 \, etb$$

$$k_{cmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}$$

modes $TM_{mn} \Rightarrow \underline{H}_z = 0$

$\underline{E}_z(x,y,z) = \underline{E}_{mnz}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\exp(-j\beta_g z)$ m=1,2,3,...

n=1,2,3,...

modes $TE_{mn} \Rightarrow \underline{\mathbf{E}}_z = 0$

GUIDE CIRCULAIRE :

$$\Rightarrow \beta_g^2 = k_0^2 - k_c^2; avec\, k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\underline{\psi}(\rho,\varphi,z) = \underline{\psi}_{mn} J_m(k_{cmn}\rho)\cos(n\varphi)\exp(-j\beta_g z)$$

Modes TM : $J_m(k_{cmn}a) = 0$; **Modes TE** : $J'_m(k_{cmn}a) = 0$

H BENZINA GCR ENG

DS PG ENIG 2020-2021

(1)

Ex 1

1) a) $\underline{\rho}_L = \dfrac{\underline{z}_L - z_c}{\underline{z}_L + z_c} = 0,0674 - j\,0,5440$;

b) $s = \dfrac{1+|\underline{\rho}_L|}{1-|\underline{\rho}_L|}$; $|\underline{\rho}_L| = 0,5482$; $s = 3,4267$

c) $\underline{y}_L = \dfrac{1}{\underline{z}_L} = (6,498 + j\,10,108) \times 10^{-3}\ \Omega^{-1}$

2) a) $\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}_L \exp(2j\beta(z-L))$; $z_0 = L - 0,13 \Rightarrow z_0 - L = -0,13\ m$

$\angle \underline{\rho}_L = -1,4476\ rd$

$\underline{\rho}(z_0) = 0,5482 \cdot e^{-j\,1,4476} \cdot e^{(2j\frac{2\pi}{0,08} \times (-0,13))}$

$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$

$\boxed{\underline{\rho}(z_0) = -0,5440 + j\,0,0674}$

b) $\underline{z}(z_0) = z_c \dfrac{1+\underline{\rho}(z_0)}{1-\underline{\rho}(z_0)} = (21,96 - j\,4,230)\ \Omega$

c) $z_1 = L - 9cm$; $\underline{\rho}(z_0) = \underline{\rho}(z_1)$ car $z_1 = z_0 - \dfrac{\lambda}{2}$

d) $\underline{z}(z_1) = \underline{z}(z_0)$ par transformation.

29 pts

Ex 2

a) $X_L = -\dfrac{1}{\omega C} = -\dfrac{1}{2\pi f C} = -225,11\ \Omega$

$\Rightarrow \underline{z}_L = 150 - j\,225,1\ \Omega$

$z_A = \dfrac{\underline{z}_L}{z_c} = 2 - j\,3$; a) $s \approx 6,8$ (Théo 6,859) ; b) $|\underline{\rho}_L| = 0,741$ (Théo 0,7455)

$\theta_L = -26,5°$ (Théo $-26,56$)

HBENZINA GOR ENIG

c - $\underline{y}_{A'} = 0,16 + j\,0,23 \Rightarrow \underline{y}_{A'} = \frac{\underline{y}_{A'}}{z_c} = (0,213 + j\,0,307)\,10^{-2}\,\Omega^{-1}$

d - 15 cm $\rightsquigarrow \frac{15}{\lambda}$; $\lambda = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,f} = 0,2450\,m = 24,5\,cm$

$\frac{15}{24,5} = 0,6122\lambda = 0,5\lambda + 0,1122\lambda$

$d_A = 0,287\lambda$ $\quad d_B = d_A + 0,112\lambda = 0,399\lambda$

$\underline{z}_B = 0,225 - j\,0,715$ (Hacia $(0,222 - j\,0,711)$)

$\underline{z}_B = (16,88 - j\,53,6)\,\Omega$ (Hacia $(16,64 - j\,53,31)\,\Omega$)

e - posición de mínimos de tensión

mín de tensión $\Rightarrow d_{V_{min}} = 0,5\lambda$

posición mínimas $L - (0,5\lambda - d_A + n\frac{\lambda}{2}) = L - (0,213\lambda + n\frac{\lambda}{2})$

$= L - (5,2185\,cm + n\,12,25\,cm)$

max de tensión (se agrega $\frac{\lambda}{4}$)

posición máximas $= L - (0,25 + 0,5\lambda - d_A + n\frac{\lambda}{2})$

$= L - (0,463\lambda + n\frac{\lambda}{2}) = L -$

$= L - (11,344 + n\,12,25\,cm)$

f - polar ou $\underline{z} = r + j$

$\lambda_{(r+j)} = 0,129\lambda$ et $\lambda_{(r+j)} = 0,296\lambda \rightarrow L - (0,129\lambda + 0,5\lambda = d_A + n\frac{\lambda}{2})$

et $L - (0,296\lambda + 0,5\lambda - 0,287 + n\frac{\lambda}{2})$

$\Rightarrow \begin{cases} L - (0,342 + n\frac{\lambda}{2}) = L - (8,379\,cm + n\,12,25\,cm) \\ L - (0,439 + n\frac{\lambda}{2}) = L - (10,7555\,cm + n\,12,25\,cm) \end{cases}$

HBENZINA GCR ENG

g - point on $\underline{z} = 1 + jb$.

Ce sont les intersections avec le cercle $r = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} L - (d_{B_1'} + n\frac{\lambda}{2} - d_A) = L - (0{,}1921\lambda + 0{,}5\lambda - 0{,}287\lambda + n\frac{\lambda}{2}) \\ L - (d_{B_2'} + n\frac{\lambda}{2} - d_A) = L - (0{,}3091\lambda - 0{,}287\lambda + n\frac{\lambda}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} = L - (0{,}405\lambda + n\frac{\lambda}{2}) = L - (9{,}225\,cm + n\,12{,}5\,cm) \\ = L - (0{,}0220\lambda + n\frac{\lambda}{2}) = L - (0{,}5390\,cm + n\,12{,}5\,cm) \end{cases}$$

1) 6,97 k

2) on travaille en admittance.

$d_{A'} = 0{,}037\lambda$; $d_{B_1'} = 0{,}192\lambda$; $d_{B_2'} = 0{,}309\lambda$

$\underline{y}_{B_1'} = 1 + j\,2{,}2$ $\quad \underline{y}_{B_2'} = 1 - j\,2{,}2$

$d_1 = d_{B_1'} - d_{A'} + n\frac{\lambda}{2} = 0{,}155\lambda + n\frac{\lambda}{2} = 3{,}975\,cm + n\,12{,}5\,cm$

$d_2 = d_{B_2'} - d_{A'} + n\frac{\lambda}{2} = 0{,}272\lambda + n\frac{\lambda}{2} = 6{,}664\,cm + n\,12{,}5\,cm$

avec le stub on ajoute l'admittance $-j\,2{,}2 \times Y_c = -j\,4{,}4$ ($\underline{Y}_c'$)

pour la 1ère solution et $+j\,4{,}4$ pour la seconde

$\Rightarrow d_1 = 0{,}287\lambda \Rightarrow l_1 = d_1 - d_{CO} + n\frac{\lambda}{2} = 0{,}287\lambda + n\frac{\lambda}{2}$ (d_{CO} : court-circuit)

$l_1 = 7{,}0315\,cm + n\,12{,}5\,cm$

$d_2 = 0{,}214\lambda \Rightarrow l_2 = d_2 - d_{CO} + n\frac{\lambda}{2} = 0{,}214\lambda + n\frac{\lambda}{2}$

$l_2 = 5{,}243\,cm + n\,12{,}5\,cm$

2) 3,64 M

Ex 3

a) $f_{c_{13}} = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ $\quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ $\quad f_{c_{13}} = 6{,}026\,10^9\,Hz$

b) $f_0 = 1{,}25\, f_{c_{13}} = 7{,}532\,10^9\,Hz$

HBENZINA GCR ENIG

c) $\beta_g = \sqrt{k_0^2 - k_{c_{13}}^2}$ (1) $\quad k_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f_0}{v} = 273,248 \text{ rd/m}$ (4)

$$k_{c_{13}} = \frac{\omega_{c_{13}}}{v} = \frac{2\pi f_{c_{13}}}{v} = 218,5985 \text{ rd/m}$$

$\Rightarrow \beta_g = 163,95 \text{ rd/m}$ (3)

d) $\lambda_{c_{13}} = \frac{2\pi}{k_{c_{13}}} = 2,874 \text{ cm}$ (2) (1)

e) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta_g} = 3,832 \text{ cm}$ (2) (1)

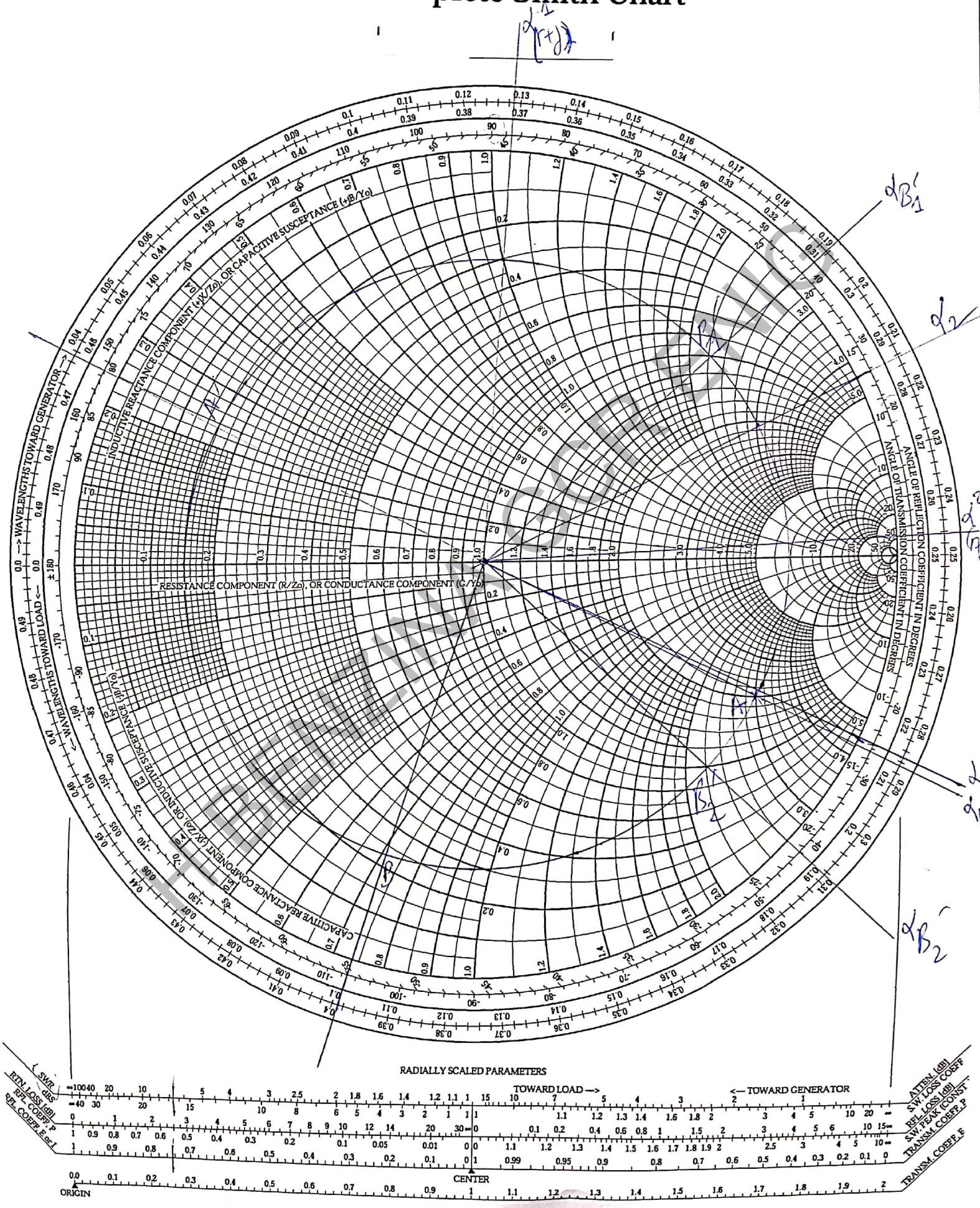
f) $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{2\pi f_0}{\beta_g} = 2,8868\,10^8 \text{ m/s}$ (2) (1)

28 µs

1 µs → 0,2222 → lungime 158 µs
→ 31,6 µs

H BENZINA GCRENIG

The Complete Smith Chart



GCR1

A.U 2021-2022

BENZINA H

Documents non autorisés

1 page+1 abaque+1 formulaire

DUREE 2H00

DEVOIR DE SYNTHESE
PROPAGATION GUIDEE

N.B :*L'étudiant(e), dispose d'un formulaire et d'une abaque.*
L'usage d'une calculatrice standard est autorisé. L'usage d'un téléphone mobile est interdit

EXERCICE N°1

Une ligne de transmission sans pertes d'impédance caractéristique Z_c=75Ω est terminée en z=L, par une impédance $\underline{Z}_L$=50-j150(Ω). Trouver par le calcul uniquement :

1°)a) en z=L le coefficient de réflexion $\underline{\rho}_L$ (sous forme $\underline{\rho}(z)=a+jb$)

b) en z=L le coefficient de réflexion $\underline{\rho}_L$ (sous forme module et argument (ou phase ou angle)).

2°)le ROS.

EXERCICE N°2 (abaque de Smith)

Une ligne coaxiale remplie d'un diélectrique de constante relative ε_r=3, de longueur L=50cm, d'impédance caractéristique Zc=75Ω est terminée par une impédance constituée par une résistance R=40 Ω en série avec une capacité C de 2.62pF. La ligne est alimentée par un générateur délivrant un signal de fréquence 900MHz.

En utilisant l'abaque de Smith (et non pas le calcul analytique) , déterminer:

1°)le rapport d'ondes stationnaires s.

2°) le coefficient de réflexion $\underline{\rho}_L$ (module et angle).

3°)l'admittance de charge $\underline{Y}_L$ (avec la meilleure précision possible).

4°)l'impédance en z=42.3 cm.

EXERCICE N°3

1°)A partir de l'expression de la constante de propagation des lignes de transmissions généralisées γ (voir formulaire), obtenir deux équations à deux inconnues α et β en fonction de R', G', L' , C' et ω.

2°)Déduire l'expression de β puis de α en fonction de R', G', L' , C' et ω.

H BENZINA GCR ENIG

3°)Simplifier les expressions précédentes dans le cas d'une ligne à faibles pertes.

EXERCICE N°4

L'équation d'onde, dans un milieu linéaire , homogène et isotrope s'écrit : $\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0$ (1) *avec* $k_0^2 = \omega^2\varepsilon\mu$

et Ψ *représente une composante du champ* $\vec{E}(M)$ *ou du champ* $\overrightarrow{H(M)}$

On veut résoudre cette équation dans le cas d'un guide rectangulaire vide dont la section transversale a pour dimensions a et b respectivement suivant Ox et Suivant Oy. L'onde se propage, sans atténuation, suivant Oz avec une constante de propagation β_g.

1°)a) Expliquer avec tous les détails nécessaires comment résoudre l'équation (1) pour un guide quelconque faisant propager une onde , sans atténuation, suivant Oz avec une constante de propagation β_g.

b)Mettre en évidence k_c et trouver la relation qui lie les trois constantes (de propagation) : β_g, k_0 et k_c.

c)trouver l'expression générale de $\Psi(x,y,z)$.)

2°) On revient donc à notre guide rectangulaire, pour lequel on veut étudier les modes Transverses Magnétiques (TM).

a)Qu'est ce qui caractérise ces modes.

b)Quelles conditions aux limites doit-on appliquer ?

c)Obtenir en vous appuyant des résultats obtenues dans les questions précédentes, l'expression de E_z (x,y,z).

3°)En restant toujours dans le même contexte :

a)Rappeler l'équation de Maxwell faisant intervenir le rotationnel de $\vec{H}(M)$

b)Développer l'équation vectorielle précédente en utilisant les simplifications qui s'imposent, pour obtenir trois équation scalaires.

c)Obtenir les relations liant les composantes tangentielles de $\vec{E}(M)$ et $\vec{H}(M)$ à la composante longitudinale.

d)Obtenir les expressions des composantes tangentielles de $\vec{E}(M)$ et $\vec{H}(M)$

g)Les expressions des composantes des champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{H}(M)$

H.BENZINA GCR ENIG



FORMULAIRE

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; $div\,\vec{D} = \rho$; $div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Relations de continuité :

$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$; $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$; $\vec{n}.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$;

$\vec{n}.(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Puissance moyenne transportée dans le guide :

$P = \mathrm{Re}\left(\iint \frac{1}{2}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}^{*} \right).d\vec{S} \right)$

LES LIGNES DE TRANSMISSION

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = -R'\underline{I} - L'\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} \; ; \; \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -G'\underline{U} - C'\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$$

Equations des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2}L'C' - \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}[R'C' + L'G'] - R'G'\underline{U} = 0$$

Régime sinusoïdal

$$\underline{U}(z,t) = \underline{u}(z)e^{j\omega t} \; ; \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = -(R' + j\omega L')\underline{i} \; ;$$

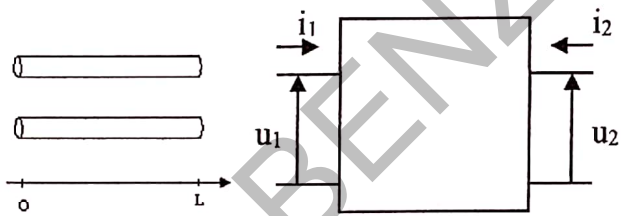
$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial z} = -(G' + j\omega C')\underline{u} \; ; \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{u}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$$\underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z} \; ; \underline{i}(z) = \underline{Y}_c(\underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{u}_- e^{+\underline{\gamma}z})$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{u}_+}{\underline{i}_+} = -\frac{\underline{u}_-}{\underline{i}_-} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')}{(G' + j\omega C')}}$$

Une ligne de transmission de longueur L est équivalente à un quadripôle :



$$\begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(\underline{\gamma}L) & -\underline{Z}_c \sinh(\underline{\gamma}L) \\ -\underline{Y}_c \sinh(\underline{\gamma}L) & \cosh(\underline{\gamma}L) \end{pmatrix}}_{\text{matrice de chaine}} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{i}_1 \end{pmatrix}$$

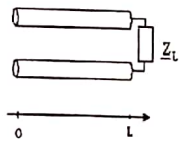
Coefficient de reflection :

$$\underline{\rho}(z) = \frac{\underline{u}_-}{\underline{u}_+}e^{2\underline{\gamma}z} \; ; \underline{u}(z) = \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1 + \underline{\rho}(z)] \; ;$$

$$\underline{i}(z) = \underline{Y}_c \underline{u}_+ e^{-\underline{\gamma}z}[1 - \underline{\rho}(z)]$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\rho}(z)}{1 - \underline{\rho}(z)} \; ; \underline{\rho}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - \underline{Z}_c}{\underline{Z}(z) + \underline{Z}_c}$$

LIGNE TERMINEE PAR UNE CHARGE



$\underline{\rho}(z) = \underline{\rho}_L e^{2\underline{\gamma}(z-L)}$

Cas d'une ligne adaptée :

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{\rho}_L = 0; \underline{u}_- = 0; \underline{\rho}(z) = 0;$$

$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_c$$

Cas d'une ligne terminée par un court-circuit(cc)

$$\underline{Z}_L = 0; \underline{u}_L = 0; \underline{\rho}_L = -1; \underline{\rho}(z) = -e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \tanh[\underline{\gamma}(z - L)]$$

Cas d'une ligne terminée par un circuit ouvert(co)

$$\underline{Z}_L = \infty; \underline{i}_L = 0; \underline{\rho}_L = +1; \underline{\rho}(z) = +e^{2\underline{\gamma}(z-L)};$$

$$\underline{Z}(z) = -\underline{Z}_c \coth[\underline{\gamma}(z - L)]$$

LIGNES DE TRANSMISSION SANS PERTES

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \; ; R' = G' = 0 \; ; \underline{\gamma} = j\beta \; ;$$

$$|\underline{u}(z)| = |\underline{u}_+||1 + \underline{\rho}(0)e^{2j\beta z}|$$

Le taux d'ondes stationnaires (TOS)

$$s = \frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \Rightarrow |\rho| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

ABAQUE DE SMITH

C'est la transformation : $\underline{z}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{\underline{Z}_c} = r + jx \rightarrow \underline{\rho}(z) = a + jb$

	$\underline{z}(z)$	$\underline{\rho}(z)$	Commentaire
C.A	1	0	Point O
C.C	0	-1	Point O'
C.O	∞	+1	Point O''
Resistance pure	r	$1 - \frac{2}{1+r}$	Portion de l'axe $\in$[-1,1]
Réactance pure	jx	$\frac{jx-1}{jx+1}$	Cercle unité

GUIDES D'ONDES

$$\Delta\underline{\psi} = \underline{k}^2\underline{\psi} \; avec \underline{k}^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \quad et \; \underline{\psi} = \begin{pmatrix} \vec{\underline{E}} \\ \vec{\underline{H}} \end{pmatrix}$$

Pas de pertes $\Rightarrow \underline{k}^2 = -k_0^2 = -\omega^2\mu\varepsilon$

GUIDE RECTANGULAIRE :

H BENZINA CORENIG

Correction DS PG 2021-2022

Ex1 $\underline{z}_L = 50 - j150$; 1°) $\underline{\rho}_L = \frac{\underline{z}_L - z_c}{\underline{z}_L + z_c} = 0,5082 - j\,0,5902$

b) $|\underline{\rho}_L| = 0,7788$; $\angle \underline{\rho}_L = -0,8599\ rd = -49,27°$

2°) $s = \frac{1+|\underline{\rho}_L|}{1-|\underline{\rho}_L|} = 8,0423$

Ex2 1°) réactance $X_c = -1/\omega C = -j\,67,4957\,\Omega = -j\,67,5\,\Omega$

$\Rightarrow \underline{z}_L = 40 - j\,67,5 \Rightarrow \underline{z}_A = \frac{\underline{z}_L}{z_c} = 0,533 - j\,0,9$;

1°) $s \simeq 3,7$ (théo 3,653) 2°) $|\underline{\rho}_L| \simeq 0,57$ (théo 0,5702)

$\angle \underline{\rho}_L \simeq -87°$ (théo $-86°,9996$)

3°) $\underline{y}_A \simeq 0,48 + j\,0,83$ (théo : 0,487 + j 0,822) ; $\underline{Y}_L = \underline{y}_A Y_c = (6,50 + j\,11,07)\ 10^{-3}\ \Omega^{-1}$

4°) $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,f} = 19,25\ cm$; $L - z_0 = (50 - 42,3)\ cm = 7,7\ cm$

$\frac{L - z_0}{\lambda} = 0,400\ \lambda$; $\alpha_B = \alpha_A + 0,1\ \lambda$; $\alpha_A = 0,371\ \lambda$

$\alpha_B \simeq 0,771\ \lambda \rightsquigarrow 0,271\ \lambda$ (on enlève $0,5\ \lambda$).

$\underline{z}_B = z - j\,1,3 \rightsquigarrow \underline{Z}_B = \underline{z}_B \times Z_c = (22\,\Omega - j\,97,7)\,\Omega$

Ex3 $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \Rightarrow (\alpha + j\beta)^2 = (R'G' - \omega^2 L'C') + j(\omega R'C' + \omega L'G')$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = R'G' - \omega^2 L'C' & (1) \\ 2\alpha\beta = \omega(R'C' + L'G') & (2) \end{cases}$ (2°) $\alpha = \frac{\omega(R'C' + L'G')}{2\beta}$ $\Rightarrow \frac{\omega^2(R'C' - L'G')^2}{4\beta^2} - \beta^2 + (\omega^2 L'C' - R'G') = 0$

$\Rightarrow 4\beta^4 - 4\beta^2(\omega^2 L'C' - R'G') - \omega^2(R'C' - L'G')^2 = 0$

on pose $\beta^2 = X$ puis on résout $\Rightarrow \Delta' = 4(\omega^2 L'C' - R'G')^2 + 4\omega^2(R'C' - L'G')^2$

$X_{1,2} = \frac{2(\omega^2 L'C' - R'G') \pm \sqrt{\Delta'}}{4}$. la solution avec signe + est la seule retenue

$\Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{2}\left[(\omega^2 L'C' - R'G') + \sqrt{(\omega^2 L'C' - R'G')^2 + \omega^2(R'C' - L'G')^2}\right]$

$\Rightarrow \boxed{\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\omega^2 L'C' - R'G') + \sqrt{(\omega^2 L'C' - R'G')^2 + \omega^2(R'C' - L'G')^2}\right]}}$

d'après (1) $\alpha^2 = \beta^2 + R'G' - \omega^2 L'C' \Rightarrow$

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(R'G' - \omega^2 L'C') + \sqrt{(\omega^2 L'C' - R'G')^2 + \omega^2(R'C' - L'G')^2}\right]}$

3°) faibles pertes $\Rightarrow$ R' et G' sont petits mais pas trop de telle sorte qu'on négligera $R'G'$ et α^2 devant β^2

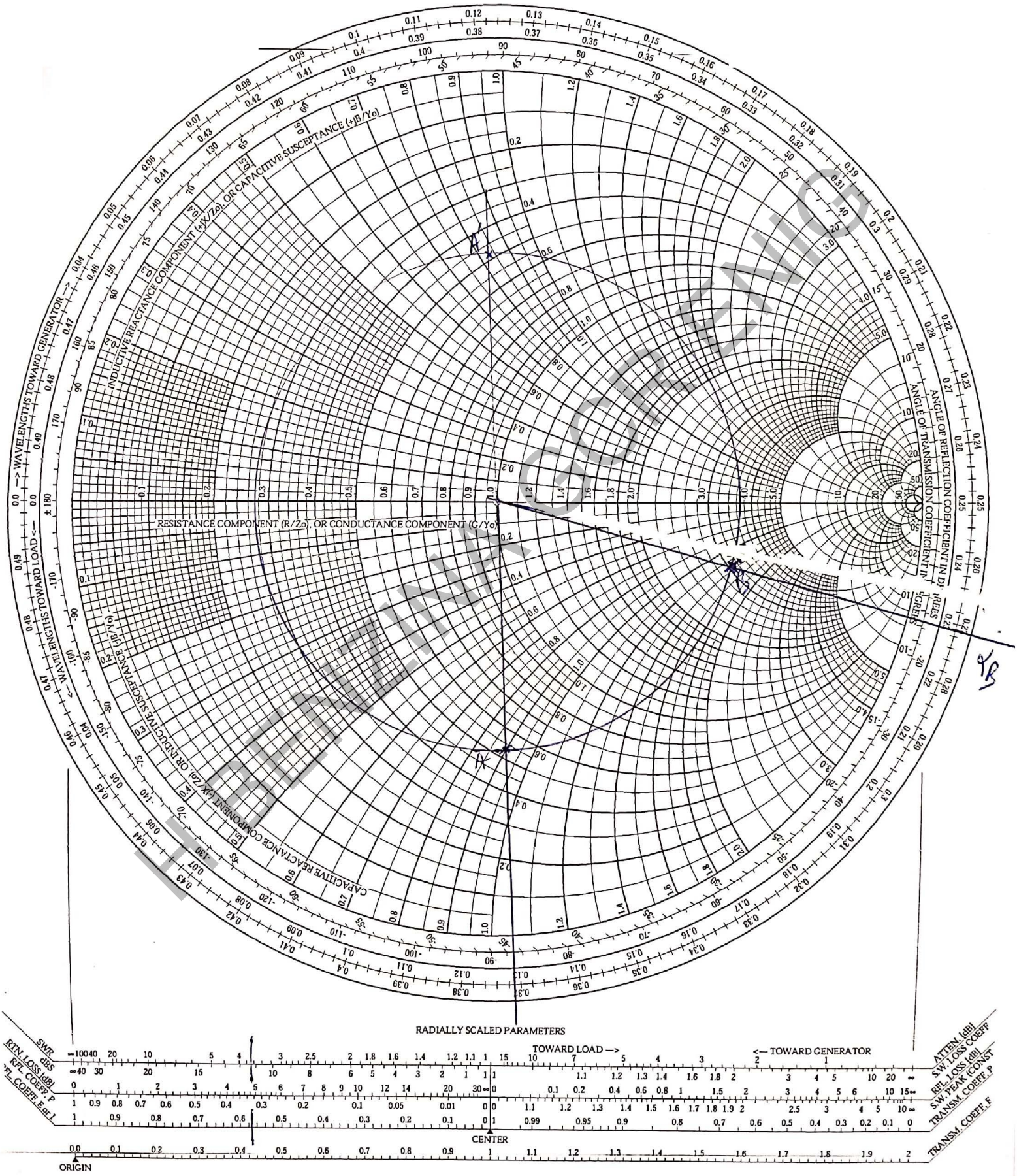
$\Rightarrow (1) \Rightarrow -\beta^2 \simeq -\omega^2 L'C' \Rightarrow \beta \simeq \omega\sqrt{L'C'}$

$(2) \Rightarrow \alpha \simeq \frac{\omega(R'C' + L'G')}{2\omega\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{2}\left(R'\sqrt{\frac{C'}{L'}} + G'\sqrt{\frac{L'}{C'}}\right)$

HBENZINAGGREENG

DS PG 2021-2022

The Complete Smith Chart



Ex 4 1°a) on pose $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$; $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

$\Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k_0^2 XYZ = 0$

on divise par $XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k_0^2 = 0$ (◇)

comme on veut propager une onde suivant Oz avec la constante β_g

$\frac{Z''}{Z} = -\beta_g^2$ de telle sorte que $\underline{Z}(z) = \underline{E}\, e^{-j\beta_g z}$ N'oublions pas que le terme $e^{j\omega t}$ doit compléter $\psi(x,t)$ ce qui donnerait $e^{-j(\beta_g z - \omega t)}$ lequel exprime une onde progressive selon $Oz > 0$.

l'équation (◇) implique que $\frac{X''}{X} = -k_x^2$ et $\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$

où k_x et k_y sont des constantes.

b) ainsi on aura $-k_x^2 - k_y^2 - \beta_g^2 + k_0^2 = 0$, on pose

$k_c = k_x^2 + k_y^2 \Rightarrow -k_c^2 - \beta_g^2 + k_0^2 = 0$ ou $\boxed{\beta_g^2 = k_0^2 - k_c^2}$ (◇◇)

c) $\frac{X''}{X} = -k_x^2 \Rightarrow X'' + k_x^2 X = 0 \Rightarrow X = (A_1 e^{-jk_x x} + B_1 e^{jk_x x})$ ou $X = A\sin k_x x + B\cos k_x x$

de même $\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \Rightarrow Y = C\sin k_y y + D\cos k_y y$; finalement

$$\boxed{\psi(x,y,z) = (A'\cos k_x x + B'\sin k_x x)(C'\sin k_y y + D'\cos k_y y)\, e^{-j\beta_g z}} \quad (□)$$

2°) a) modes TM $\Rightarrow H_z = 0$; b) on applique $E_z(x=0) = 0$ et $E_z(x=a) = 0$

et $E_z(y=0) = 0$ et $E_z(y=b) = 0$

c) $E_z(x=0) = 0 \Rightarrow A\sin k_x 0 + B\cos k_x 0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$E_z(x=a) = 0 \Rightarrow A\sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$ $m = 1, 2, 3, \ldots$

$E_z(y=0) = 0 \Rightarrow C\sin k_y 0 + D\cos k_y 0 = 0 \Rightarrow D = 0$

$E_z(y=b) = 0 \Rightarrow C\sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

finalement $\boxed{\underline{E}_z(x,y,z) = \underline{E}_z \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y\, e^{-j\beta_g z}}$ (□□)

3°) a) $\vec{rot}\,\vec{H} = +j\omega\varepsilon\vec{E}$ ($\vec{J} = 0$)

b) $\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x$; $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y$; $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$

on a $\frac{\partial}{\partial z}(\,) = -j\beta_g(\,)$ et $H_z = 0$; $+j\beta_g H_y = j\omega\varepsilon E_x$; $-j\beta_g H_x = j\omega\varepsilon E_y$

c) Pour cela il faut ajouter $\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x$ (1)

$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$; $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \Rightarrow +j\beta_g E_y + \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu H_x$; (3)

$-j\beta_g E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$ et $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$; (1) et (2) $\Rightarrow \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon}$ (5)

(3) et (5) $\Rightarrow +j\frac{\beta_g^2}{\omega\varepsilon}H_x - j\omega\mu H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y}$ (ω) $\Rightarrow jH_x(\beta_g^2 - \omega^2\mu\varepsilon) = \frac{\partial E_z}{\partial y} \Rightarrow$ avec (◇◇) $\boxed{H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}}$ (6)

H BENZINA GCR ENG

(5) $\boxed{E_y = -j\frac{\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}}$ (7) //

ensuite (4) et (5) $\Rightarrow \frac{j\beta_g^2}{\omega\varepsilon} H_y + \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu H_y$ (3)

$\Rightarrow \frac{jH_y}{\omega\varepsilon}\left(\beta_g^2 - \omega^2\mu\varepsilon\right) = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{H_y = -j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}}$ (8) ///

et avec (5) $\boxed{E_x = -j\frac{\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}}$ (9) //

d) On en suit de (10) et de (6) - (9) que

$E_x = E_{x_{mn}} \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$ //

$E_y = E_{y_{mn}} \sin\frac{m\pi}{a}x \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$ //

$H_x = H_{x_{mn}} \sin\frac{m\pi}{a}x \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$ //

$H_y = H_{y_{mn}} \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$ //

5) 34 pts

total : $12 + 34 + 29 + 28 + 21 + 34 = 158$ pts $\Rightarrow 1$ pt $= \Phi,1266$

H BENZINA GCR ENG